A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea că există numerele întregi a şi b astfel încât

$$n^2 = a + b \quad \text{şi} \quad n^3 = a^2 + b^2.$$

Subiectul 2. Să se demonstreze că ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004},$$

unde $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$, are exact două soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul 3. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care dreptele BC' şi DA' sunt perpendiculare.

a) Să se arate că măsura unghiului dintre dreptele AB' şi DA' este de $60°$.

b) Dacă proiecţia punctului B' pe planul (ABC) este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, să se demonstreze că distanţa dintre dreptele CB' şi AD' este egală cu $\frac{1}{2}BC'$.

Subiectul 4. În interiorul unui cub de latură 6 se consideră 1001 cuburi unitate cu feţele paralele cu feţele cubului dat. Să se demonstreze că există două cuburi unitate cu proprietatea că centrul unuia se află în interiorul sau pe feţele celuilalt.